Clase 6: Martes 13/9/22

3) INTEGRALES CURVILÍNEAS DE CAMPOS VECTORIALES

Estas integrales son un caso particular de las integrales curvilíneas de campos escalares y tienen como aplicación a la física el cálculo del trabajo realizado por un campo de fuerzas.

Definición

Sea $\gamma = f([a,b])$ una curva regular y simple tal que $\gamma \subset D \subset \mathbb{R}^n$ y D un abierto conexo y sea $F: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial continuo.

Si una partícula unidad recorre la curva pasando por cada punto P con velocidad unitaria dada por $\vec{v}(P)$, se define la ***integral curvilínea del campo vectorial*** $\vec{F}$ ***sobre*** $\boldsymbol{\gamma}$ como sigue:

$$\int_\gamma [\vec{F}(P) \cdot \vec{v}(P)]\, ds \quad (1)$$

Así, la integral del campo vectorial no es otra cosa que la integral sobre la curva γ de la componente de F en la dirección de $\vec{v}$.

Ya que $\vec{F}(P) \cdot \vec{v}(P)$ es un escalar, la integral (1) es una integral curvilínea de un campo escalar. Por esto, para calcularla podemos utilizar la definición dada.

Observemos que $\forall\, t \in (a,b)$ $\frac{f'(t)}{\|f'(t)\|}$ es un vector unitario tangente a γ en el punto $P = f(t)$ pero puede ocurrir que $\frac{f'(t)}{\|f'(t)\|} = \vec{v}(f(t))$ ó $\frac{-f'(t)}{\|f'(t)\|} = \vec{v}(f(t))$

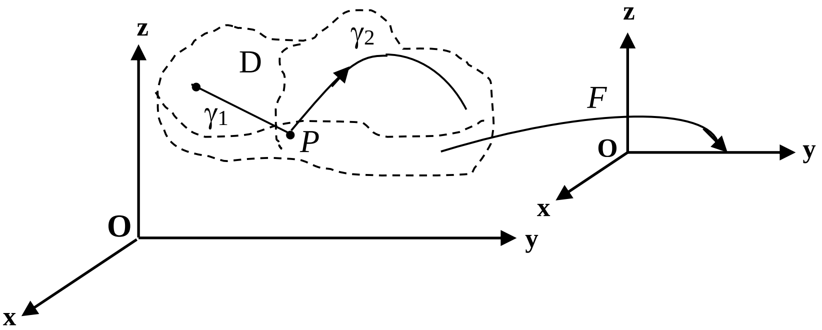
Si está ocurriendo lo primero:

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot \vec{v}\, ds = \int_a^b [F(f(t)) \cdot \frac{f'(t)}{\|f'(t)\|} \|f'(t)\|]dt = \int_a^b [F(f(t)) \cdot f'(t)]dt$$

Sino $\int_\gamma \vec{F} \cdot \vec{v}\, ds = -\int_a^b [F(f(t)) \cdot f'(t)]dt$

Si $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ donde γ_1 y γ_2 son curvas regulares y simples tales $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \Phi$ o $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \{P\}$ con P punto inicial de γ_1 y final de γ_2 o P punto inicial de γ_2 y final de γ_1, entonces:

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot \vec{v}\, ds = \int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot \vec{v}\, ds + \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot \vec{v}\, ds$$



Notación

Si $n = 2$,

$\vec{F}(P) = (F_1(P), F_2(P))$ y también se usa la notación $\int_\gamma F_1(P)dx + F_2(P)dy$ para $\int_\gamma \vec{F} \cdot \vec{v} ds$

Si $n = 3$,

$\vec{F}(P) = (F_1(P), F_2(P), F_3(P))$ y también se usa la notación $\int_\gamma F_1(P)dx + F_2(P)dy + F_3(P)dz$ para $\int_\gamma \vec{F} \cdot \vec{v} ds$

Interpretación física de la integral curvilínea de un campo vectorial

Si $\vec{F}$ es un campo de fuerzas continuo definido en γ curva regular y simple, la $\int_\gamma \vec{F}\cdot\vec{v}\,ds$ representa el ***trabajo realizado por el campo*** $\vec{F}$ ***para mover una partícula unidad a lo largo de*** $\boldsymbol{\gamma}$.

Ejemplo

1) Calcular el trabajo que realiza el campo $F(x.y)=(x-y,x+y)$ para mover una partícula unidad desde $A(1,1)$ hasta $B(2,3)$ a lo largo del segmento que los une.

La curva γ es un segmento, por lo tanto, es una curva regular y una parametrización es

$f(t)=(1+t,1+2t), t\in[0,1]$, ya que $f(0)=A$ y $f(1)=B$.

$f'(t)=(1,2), t\in(0,1)$. Entonces:

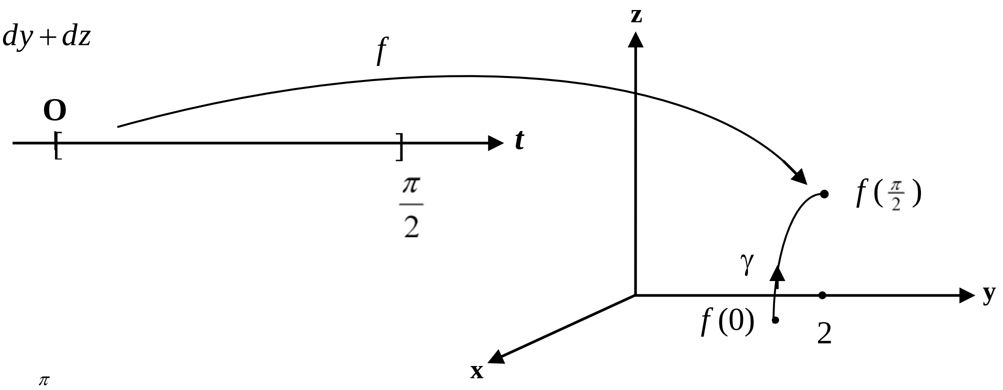
$W=\int_\gamma \vec{F}\cdot\vec{v}\,ds = \int_0^1\{[(1+t)-(1+2t)].1+[(1+t)+(1+2t)].2\}dt = \frac{13}{2}$ (unidades de trabajo)

Si hubiese querido mover la partícula desde *B* hasta *A*, el trabajo hubiese resultado $-\frac{13}{2}$.

2) Sea $f:\left[0.\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}^3$ y $\gamma=f\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)$ y el campo vectorial $F(x,y,z)=(x,yz,1)$.

$t\mapsto(\cos t\,,2,sen\,t)$

Calcular $\int_\gamma x\,dx+yz\,dy+dz$



$$\int_\gamma x\,dx+yz\,dy+dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}}[\cos t\,(-sent)+2\,sent.0+\cos t]dt = \frac{1}{2}$$

Calculamos ahora $\int_{-\gamma}\vec{F}\cdot\vec{v}ds$. Para ello necesitamos una parametrización para $-\gamma$. Esta es:

$g:\left[0.\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}^3$. Luego $g(t)=(sent,\ 2\ ,\ \cos t)\quad t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

$t\mapsto\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right),2,sen\,\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right)$

Entonces $\int_\gamma \vec{F}\cdot\vec{v}\,ds = \int_{-\gamma} x\,dx+yz\,dy+dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}}[sent\ \cos t\ +2\cos t.0-sent]dt = -\frac{1}{2}$

Observación

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot \vec{v}\, ds = -\int_{-\gamma} \vec{F} \cdot \vec{v}\, ds$$

de lo que se sigue que la integral curvilínea del campo vectorial $F(x,y,z)=(x,yz,1)$ cambia de signo cuando cambiamos la orientación de la curva γ.

Este resultado obtenido es un caso particular de un resultado general como veremos cuando enunciemos las propiedades la integral curvilínea de los campos vectoriales.

Propiedades de las integrales curvilíneas de campos vectoriales

1) Linealidad

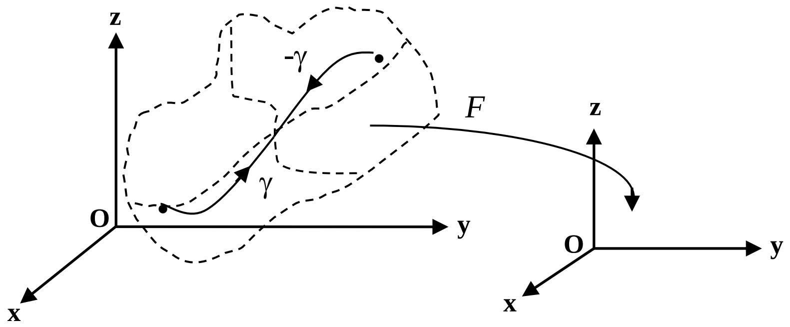
Si $\vec{F}$ y $\vec{G}$ son campos vectoriales continuos definidos en γ, curva simple, regular o regular a trozos y $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}$, entonces

$$\int_{\gamma} (a\vec{F} + b\vec{G}) \cdot \vec{v}\, ds = a \int_{\gamma} \vec{F} \cdot \vec{v}\, ds + b \int_{\gamma} \vec{G} \cdot \vec{v}\, ds$$

2) Dependencia de la orientación del arco

Si $\vec{F}$ es un campo vectorial continuo definido en D que contiene a γ curva simple, regular o regular a trozos, entonces

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot \vec{v}\, ds = -\int_{-\gamma} \vec{F} \cdot \vec{v}\, ds$$



La validez de estas propiedades se sigue de las conocidas propiedades de las integrales simples y de la definición de la integral curvilínea de campos vectoriales.

TEOREMA DE GAUSS-GREEN

Este teorema realiza una transformación de integrales. Transforma una integral doble sobre una región plana R en una integral curvilínea que se calcula a lo largo de la frontera de R.

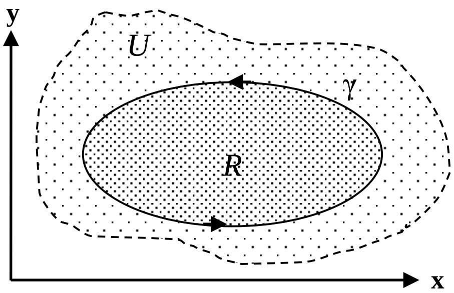
TEOREMA DE GAUSS-GREEN

Sea $R \subset \mathbb{R}^2$ una región simple, cerrada y acotada. Sea $\gamma = \partial R$ una curva cerrada, simple, regular o regular a trozos, parametrizada de manera que se recorre una sola vez en sentido antihorario, al que llamamos sentido positivo, y sea

$F: U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un campo vectorial continuamente diferenciable en U abierto
$(x,y) \mapsto (F_1(x,y), F_2(x,y))$ que contiene a R.

Entonces $$\iint_R \left[\frac{\partial F_2(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial F_1(x,y)}{\partial y}\right] dx\, dy = \oint_{\gamma} F_1(x,y)dx + F_2(x,y)dy$$

Demostración

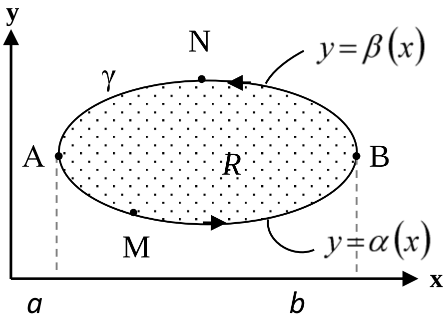


Se prueba $\iint_R -\frac{\partial F_1(x,y)}{\partial y} dx\, dy = \oint_\gamma F_1(x,y)\, dx$ y

$\iint_R \frac{\partial F_2(x,y)}{\partial x}\, dx\, dy = \oint_\gamma F_2(x,y)\, dy$

Sumando miembro a miembro estas igualdades se sigue la tesis.

Probaremos la validez de la primera de las igualdades, la validez de la segunda se prueba de la misma manera.



En la gráfica observamos una región simple, cerrada y acotada que podemos describir como sigue:

$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b, \alpha(x) \le y \le \beta(x)\}$

y $\alpha: [a,b] \to \mathbb{R}$, $\beta: [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas.

Entonces

$$\iint_R -\frac{\partial F_1(x,y)}{\partial y} dx\, dy = -\iint_R \frac{\partial F_1(x,y)}{\partial y} dx\, dy$$

$$= -\int_a^b dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial F_1(x,y)}{\partial y} dy = -\int_a^b \left[F_1(x,y)\right]_{y=\alpha(x)}^{y=\beta(x)} dx$$

$$= -\int_a^b \left[F_1(x,\beta(x)) - F_1(x,\alpha(x))\right] dx = \int_a^b \left[F_1(x,\alpha(x)) - F_1(x,\beta(x))\right] dx$$

Luego $\iint_R -\frac{\partial F_1(x,y)}{\partial y} dx\, dy = \int_a^b \left[F_1(x,\alpha(x)) - F_1(x,\beta(x))\right] dx$ (1)

Del gráfico anterior se sigue que $\gamma = \widehat{AMB} \cup \widehat{BNA}$ (2), donde $\widehat{AMB}$ indica al arco de la frontera de R que unen los puntos A y B y contiene a M y $\widehat{BNA}$ indica al arco de la frontera de R que une los puntos B y A y contiene a N. Ambos arcos regulares y simples por hipótesis.

De (2) y por definición de la integral curvilínea sobre unión de arcos regulares y simples resulta:

$$\oint_\gamma F_1(x,y)\, dx = \int_{\widehat{AMB}} F_1(x,y) dx + \int_{\widehat{BNA}} F_1(x,y) dx$$

Pero $\widehat{BNA} = -\widehat{ANB} \Rightarrow \int_{\widehat{BNA}} F_1(x,y) dx = -\int_{\widehat{ANB}} F_1(x,y) dx$ pues la integral curvilínea de los campos vectoriales cambia de signo cuando se invierte el sentido de recorrido en el arco, entonces

$$\int_{\widehat{AMB}} F_1(x,y) dx + \int_{\widehat{BNA}} F_1(x,y) dx = \int_{\widehat{AMB}} F_1(x,y) dx - \int_{\widehat{ANB}} F_1(x,y) dx$$

Para calcular estas integrales parametrizamos los arcos como sigue:

$$\widehat{AMB} \quad \begin{cases} x = t \\ y = \alpha(t) \end{cases} \quad a \le t \le b \qquad , \qquad \widehat{ANB} \quad \begin{cases} x = t \\ y = \beta(t) \end{cases} \quad a \le t \le b$$

Luego

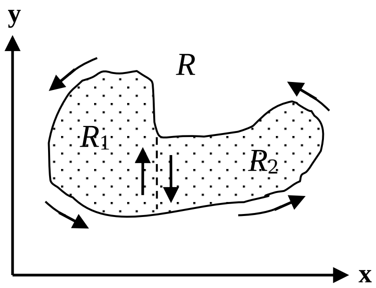
$$\int_{\widehat{AMB}} F_1(x,y)dx - \int_{\widehat{ANB}} F_1(x,y)dx = \int_a^b F_1(t,\alpha(t)).1dt - \int_a^b F_1(t,\beta(t)).1dt \quad (3)$$

De (1) y (3) se sigue $\iint_R -\frac{\partial F_1(x,y)}{\partial y} dx\, dy = \oint_\gamma F_1(x,y)\, dx$

Para demostrar la otra igualdad describimos a $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \le y \le d, \delta(y) \le x \le \varepsilon(y)\}$ con δ y ε continuas en [c, d], y $\gamma = \widehat{NAM} \cup \widehat{MBN}$.

Observación

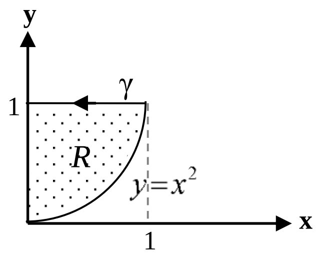
El Teorema de Gauss-Green fue enunciado y demostrado para regiones simples. La tesis del teorema también es válida para regiones que pueden descomponerse en un número finito de regiones simples.



La región R de la figura no es simple, pero se puede descomponer en dos regiones simples R_1 y R_2.
El teorema se aplica a cada una de las regiones simples.
Las integrales curvilíneas a lo largo de la frontera común a las regiones R_1 y R_2 se simplifican pues se calculan en sentidos opuestos (como se ve en la figura) y la suma de las integrales a lo largo de las restantes partes de la frontera de de R_1 y R_2 es igual a la integral curvilínea a lo largo de la frontera de R.

Ejemplo

1) Calcular $\oint_\gamma y^2\, dx + x^2\, dy$ si γ es la frontera de la región plana R de la figura recorrida en sentido antihorario.

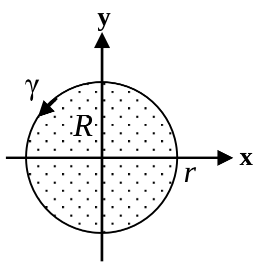


Se cumplen las hipótesis del teorema de Gauss- Green, luego

$$\oint_\gamma y^2\, dx + x^2\, dy =$$

2) Calcular el trabajo que realiza el campo $F(x,y) = \left(x^2y^2, \frac{2}{3}y\,x^3\right)$ definido en $\mathbb{R}^2$, para mover una partícula unidad a lo largo de cualquier circunferencia con centro en el origen.

Se cumplen las hipótesis del teorema de Gauss- Green, luego



$$\oint_\gamma x^2y^2\, dx + \frac{2}{3}\, y\,x^3 dy =$$

UNA APLICACIÓN DEL TEOREMA DE GAUSS-GREEN

El área de una región plana simple puede calcularse, según el Teorema de Gauss-Green mediante una integral curvilínea.
Por la interpretación geométrica de la integral doble sabemos que, el área de una región plana simple R se obtiene mediante la igualdad:

$$\text{Área de } R = \iint_R 1\, dx\, dy \quad \Rightarrow \quad 2 \text{ Área de R} = \iint_R (1+1)\, dx\, dy$$

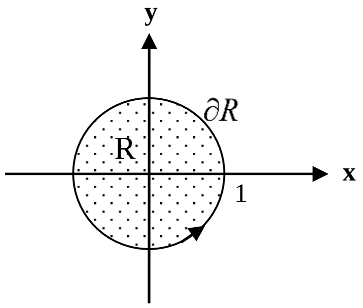
Por el teorema de Gauss- Green, tomando $F_1(x,y)=-y$ y $F_2(x,y)=x$

$$\iint_R (1+1)\, dx\, dy = \oint_{\partial R} (-y\, dx + x\, dy)$$

Luego $$\text{Área de R} = \frac{1}{2} \oint_{\partial R} (-y\, dx + x\, dy)$$

Ejemplo

3) Calcule con una integral curvilínea el área de un círculo de radio 1.



$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$

Parametrizamos ∂R : $\partial R \begin{cases} x = \cos t \\ y = sen t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

Entonces

$$\text{Área de } R = \frac{1}{2}\left[\oint_{\partial R} -y\, dx + x\, dy\right] = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [(-sent)(-sent) + \cos t \cos t] dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (sen^2 t + \cos^2 t) dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} dt = \frac{1}{2} 2\pi = \pi$$